HEINRICH-HERTZ-INSTITUT — BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 173

Anwendungen der PARCOR-Koeffizienten für die lineare Prädiktion stationärer Prozesse

von

Dipl.-Ing. Rainer Zelinski

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung
Bücherei
Nr.
5113

Berlin

1 9 7 4

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT

Berlin-Charlottenburg

Technischer Bericht Nr. 173

Anwendungen der PARCOR-Koeffizienten für die lineare Prädiktion stationärer Prozesse

von

Dipl.-Ing. Rainer Zelinski

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung
Bücherei
Nr.
5113

Berlin
1974

Technischer Bericht Nr. 173

Anwendungen der PARCOR-Koeffizienten für die lineare Prädiktion stationärer Prozesse

Zusammenfassung:

Das Verfahren der linearen Prädiktion ist ein wichtiges Hilfsmittel in der digitalen Sprachverarbeitung. Es dient zur Verringerung des Nachrichtenflusses in Codierungssystemen und zur Sprachanalyse und -synthese. In diesem Zusammenhang gewinnt der Begriff der PARCOR-Koeffizienten (Partielle Autokorrelationskoeffizienten) zunehmend an Bedeutung.

In der vorliegenden Arbeit werden die verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten der PARCOR-Koeffizienten angegeben. Insbesondere wird gezeigt, daß die PARCOR-Koeffizienten als redundanzfreie Abbildung der Autokorrelationskoeffizienten aufgefaßt werden können, da sie nur den jeweils zulässigen Wertebereich der Autokorrelationsfunktion beschreiben. Die Bedeutung und die Anwendungsmöglichkeiten der PARCOR-Koeffizienten werden eingehend erläutert.

Heinrich-Hertz-Institut

Der Bearbeiter

R. Zelinski

(Dipl.-Ing. R. Zelinski)

Der Abteilungsleiter

Berger

(Prof. Dr.-Ing. E.R.Berger)

Der Institutsdirektor

G. Boerger

(Dr.-Ing. G.Boerger)

Berlin-Charlottenburg, den 24.7.74

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Lineare Prädiktion stationärer Prozesse	2
2.1 Prädiktorfilter und Prädiktionsfehlerfilter	2
2.2 Autoregressive Prozesse endlicher Ordnung	5
2.2.1 Erzeugung eines autoregressiven Prozesses und Bestimmung seiner Autokorrelationsfunktion	5
2.2.2 Optimaler Prädiktor für einen autoregressiven Prozeß endlicher Ordnung und inverse Filterung	6
3. Zusammenhang zwischen dem Prädiktionsfehlerfilter und der Theorie der orthogonalen Polynome	8
3.1 Zusammenhang mit dem Prädiktionsfehlerfilter	8
3.2 Stabilität des inversen Prädiktionsfehlerfilters	10
4. Rekursive Lösung zur Bestimmung der Koeffizienten des Prädiktionsfehlerfilters und Interpretation des Verfahrens	11
4.1 Rekursive Lösung	11
4.2 Interpretation des Verfahrens	12
5. Definition und Bestimmung der PARCOR-Koeffizienten	14
5.1 Definition der PARCOR-Koeffizienten	14
5.2 Berechnung der PARCOR-Koeffizienten	17
5.2.1 Verwendung der PARCOR-Koeffizienten zur Prozeßbeschreibung	19
5.3 Messung der PARCOR-Koeffizienten aus Vorwärts- und Rückwärtsprädiktion	20
6. Anwendungen und Beispiele für die PARCOR-Koeffizienten	22
6.1 Realisierung des Prädiktionsfehlerfilters in einer Kreuzglied-Kaskadenschaltung	22
6.2 PARCOR-Koeffizienten für autoregressive Prozesse endlicher und unendlicher Ordnung (Beispiele)	25
6.2.1 Autoregressiver Prozeß endlicher Ordnung	25
6.2.2 Autoregressiver Prozeß unendlicher Ordnung	28
6.3 Bedeutung der PARCOR-Koeffizienten (Zusammenfassung)	30

Seite

7. Literaturverzeichnis 32

Anhang

1.A Ableitung des Prädiktionsfehlerfilters aus der Theorie der orthogonalen Polynome 35

2.A Explizite Darstellung der orthogonalen Polynome 39

3.A Explizite Darstellung der PARCOR-Koeffizienten 41

1. Einleitung

Bei der Prädiktion eines Signals wird ein zukünftiger Wert unter Kenntnis der statistischen Eigenschaften des Signals aus bereits bekannten vergangenen Werten vorhergesagt. Greift man nur auf die linearen Abhängigkeiten des Signals zurück, so kann der Prädiktor durch ein lineares Prädiktionsfilter realisiert werden.

In dieser Arbeit sollen die Signale Musterfolgen zeitdiskreter Prozesse sein. Eine derartige Musterfolge entsteht durch äquidistante Abtastung des zeitkontinuierlichen Nachrichtensignals.

Als Anwendungsbeispiel für die lineare Prädiktion sei die digitale Sprachverarbeitung genannt. Ein Prädiktor wird z.B. in DPCM- und ADPCM-Systemen zur Sprachcodierung eingesetzt, um den Nachrichtenfluß zu reduzieren /1,2,3,4/.
Die Filterstruktur, die unter Verwendung des Prädiktors aus dem Nachrichtensignal die Vorhersagefehlerfolge herausfiltert, wird als Prädiktionsfehlerfilter bezeichnet. Das Prädiktionsfehlerfilter und das dazu inverse Filter finden Anwendung in der Sprachanalyse und -synthese /5,6/.
Zur Bestimmung des optimalen Prädiktors aus der Autokorrelationsfunktion (AKF) des beobachteten Prozesses ist eine Matrix-Inversion erforderlich. Diese kann mittels eines zeitsparenden rekursiven Rechenverfahrens durchgeführt werden /5,7,8,9/.
Dieser Lösungsalgorithmus ist eng mit dem Begriff der Partiellen Autokorrelationskoeffizienten (PARCOR-Koeffizienten) verknüpft. Die Bedeutung der PARCOR-Koeffizienten wird an einer Reihe von Beispielen erläutert.
Die Folge der Autokorrelationskoeffizienten eines stochastischen Prozesses ist redundant, da Abhängigkeiten der AKF-Werte voneinander bestehen. Die PARCOR-Koeffizienten dagegen sind eine redundanzfreie Abbildung der Autokorrelationskoeffizienten, da sie nur noch den jeweils zulässigen Wertebereich der Autokorrelationsfunktion beschreiben. Sie können zur Schätzung der Ordnung eines autoregressiven Prozesses verwendet werden /10/.
Die PARCOR-Koeffizienten beschreiben in äquivalenter Weise wie die Autokorrelationskoeffizienten oder die Filterkoeffizienten des Prädiktors den beobachteten Prozeß. Diese Eigenschaft wird z.B. ausgenutzt bei der Spracherkennung /11,12/ , bei der ADPCM-

Codierung zur Übertragung der Prädiktorparameter vom Codierer zum Decodierer /3/ und zum Aufbau von Vocoder-Systemen /13/. Schließlich lassen sich auch Filterstrukturen für das Prädiktionsfehlerfilter und das dazu inverse Filter angeben, in denen die Filterkoeffizienten direkt die PARCOR-Koeffizienten sind /13/.

2. Lineare Prädiktion stationärer Prozesse

In diesem Abschnitt werden die Gleichungen zur Bestimmung des optimalen Prädiktors angegeben und es wird der Sonderfall betrachtet, daß der beobachtete Prozeß auf einen autoregressiven Prozeß endlicher Ordnung zurückzuführen ist.
Die zu verarbeitenden Signale sind dabei Musterfolgen zeitdiskreter Prozesse, wobei vorausgesetzt wird, daß diese Prozesse kovarianz-stationär sind. Das Prädiktorfilter wird als lineares zeitinvariantes digitales Filter realisiert.

2.1 Prädiktorfilter und Prädiktionsfehlerfilter

Es liegt folgende Aufgabenstellung vor:
Eine Folge von Daten $\{x_n\}$ mit dem Mittelwert

$$E[x_n] = 0 \tag{2.1.1}$$

und der Autokorrelationsfunktion

$$R_{xx}(k) = E[x_n \, x_{n+k}] \tag{2.1.2}$$

wird beobachtet. Ein zukünftiger Wert x_n soll möglichst gut vorhergesagt werden, wenn nur die Daten $x_{n-N}, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}$ bekannt sind. Der Schätzwert $\hat{x}_n$ für den Wert x_n wird aus einer Linearkombination der Daten

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^{N} p_i \, x_{n-i} \tag{2.1.3}$$

berechnet. Die Schätzung kann durch ein digitales Filter mit der Übertragungsfunktion

$$P(z) = \sum_{i=1}^{N} p_i \, z^{-i} \tag{2.1.4}$$

realisiert werden (Bild 2.1) .

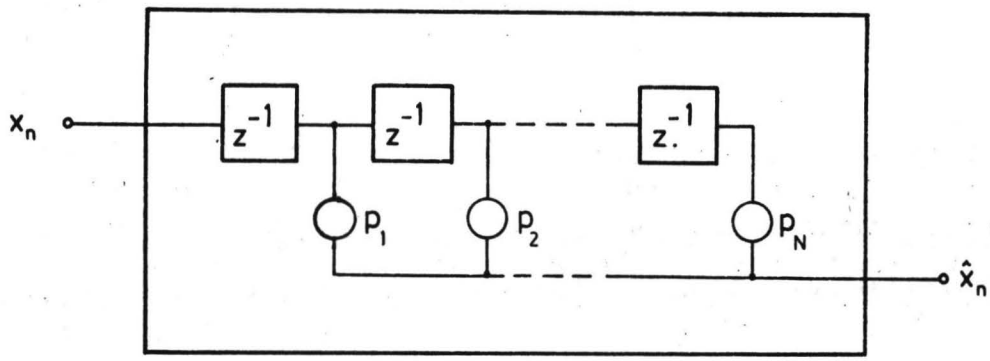

Bild 2.1 : Struktur des digitalen Prädiktorfilters P(z) .

Der Vorhersagefehler ist

$$f_n = x_n - \hat{x}_n \quad . \tag{2.1.5}$$

Der Prädiktor wird so optimiert, daß der mittlere quadratische Fehler bei der Vorhersage

$$\sigma_N^2 = E[\, f_n^{\,2} \,] \overset{!}{=} \min. \tag{2.1.6}$$

ein Minimum wird /5,14/. Die Bedingungen

$$\frac{\partial \sigma_N^2}{\partial p_j} = 0 \quad , \qquad j = 1, \ldots, N$$

führen auf das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^* \, R_{xx}(j-i) = R_{xx}(j) \quad ; \qquad j = 1, \ldots, N \; . \tag{2.1.7}$$

Die Größen p_i^* sind die optimalen Prädiktorkoeffizienten. In Matrix-Schreibweise wird Gl. 2.1.7

$$\underline{R}_{xx}\,\underline{p}^* = \underline{r}_{xx} \tag{2.1.8}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(N-2) \\ & & \ddots & \\ R_{xx}(N-1) & & \dots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ \vdots \\ p_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) \\ \vdots \\ R_{xx}(N) \end{bmatrix} .$$

Die Matrix $\underline{R}_{xx}$ ist die Autokovarianzmatrix der Folge $\{x_n\}$ und weist eine Toeplitz-Struktur auf (Streifensymmetrie bezüglich der Hauptdiagonalen).

Für den mittleren quadratischen Vorhersagefehler erhält man mit Gl. 2.1.7

$$\sigma_N^2 = R_{xx}(0) - \sum_{i=1}^{N} p_i^*\, R_{xx}(i) \quad . \tag{2.1.9}$$

Wird der Prädiktor zusammengesetzt zu dem System nach Bild 2.2 mit x_n als Eingang und f_n als Ausgang, so entsteht ein System mit der Übertragungsfunktion

$$V(z) = \sum_{i=0}^{N} v_i\, z^{-i} = 1 - F(z) \quad . \tag{2.1.10}$$

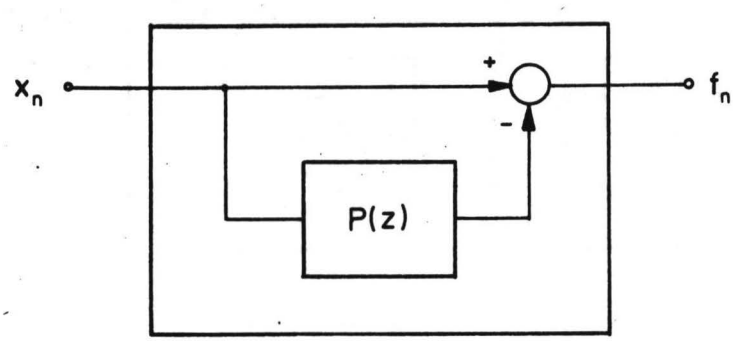

Bild 2.2 : Prädiktionsfehlerfilter V(z).

Es wird als Prädiktionsfehlerfilter (PF-Filter) bezeichnet, da am Systemausgang gerade der Prädiktionsfehler auftritt. Für die Filterkoeffizienten gilt dabei

$$v_0 = 1 \quad ; \qquad v_i = -p_i^* \quad , \quad i = 1,\ldots, N \; . \tag{2.1.11}$$

2.2 Autoregressive Prozesse endlicher Ordnung

2.2.1 Erzeugung eines autoregressiven Prozesses und Bestimmung seiner Autokorrelationsfunktion

Über die Entstehung der im allgemeinen korrelierten Datenfolge $\{x_n\}$ wurden bisher noch keine Aussagen getroffen. Entsteht die Folge $\{x_n\}$ durch Filterung einer unkorrelierten Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit einem rein rekursiven Filter, so spricht man von einem autoregressiven Prozeß. Das rekursive Filter B(z) wird durch die Differenzengleichung

$$x_n = \varepsilon_n + \sum_{i=1}^{M} b_i \, x_{n-i} \tag{2.2.1}$$

beschrieben; Bild 2.3 zeigt eine mögliche Realisierung.

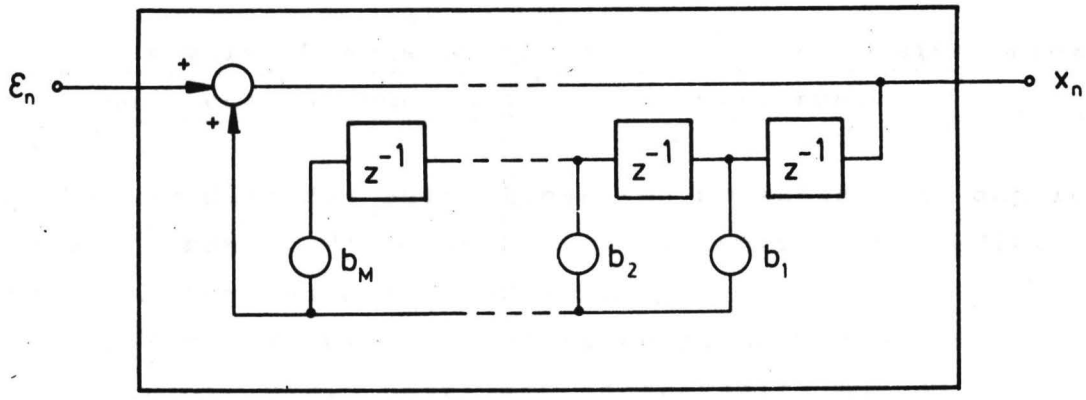

Bild 2.3 : Aufbau des rein rekursiven Filters B(z).

Wie aus der Übertragungsfunktion

$$B(z) = z^M / (z^M - \sum_{i=1}^{M} b_i \, z^{M-i}) \qquad (2.2.2)$$

ersichtlich ist, wird der autoregressive Prozeß durch ein Nur-Pole-Modell beschrieben.
Die Autokorrelationsfunktion des Prozesses kann direkt aus der Differenzengleichung 2.2.1 ermittelt werden. Die Multiplikation von Gl. 2.2.1 mit x_{n-k} und Bildung der Erwartungswerte führt auf

$$R_{xx}(k) = E[\varepsilon_n \, x_{n-k}] + \sum_{i=1}^{M} b_i \, R_{xx}(k-i) \quad . \qquad (2.2.3)$$

Die Folge $\{\varepsilon_n\}$ ist unkorreliert, damit wird aus Gl. 2.2.3

$$R_{xx}(0) = \sigma_\varepsilon^2 + \sum_{i=1}^{M} b_i \, R_{xx}(i) \qquad (2.2.4)$$

und

$$R_{xx}(k) = \sum_{i=1}^{M} b_i \, R_{xx}(k-i) \quad ; \quad k \geq 1 \quad . \qquad (2.2.5)$$

Die Gln. 2.2.4 und 2.2.5 können mit einem rekursiven Rechenverfahren gelöst werden, um die AKF-Werte $R_{xx}(k)$ für $k = 0,\ldots,M$ zu bestimmen /5/. Für $k > M$ können die weiteren AKF-Werte schrittweise sofort aus der Gl. 2.2.5 ermittelt werden.

2.2.2 Optimaler Prädiktor für einen autoregressiven Prozeß endlicher Ordnung und inverse Filterung

Das Filter B(z) des autoregressiven Prozesses sei endlicher Ordnung (Ordnung M). Gesucht ist ein optimaler Prädiktor der Ordnung N für den Fall, daß $N \geq M$:
Die AKF-Werte $R_{xx}(k)$ des autoregressiven Prozesses $\{X_n\}$ sind durch die Gl. 2.2.5 bestimmt. Andererseits müssen die optimalen Prädiktorkoeffizienten p_i^* dem Gleichungssystem 2.1.7 genügen. Der Vergleich beider Gleichungssysteme ergibt sofort die Lösung

$$p_i^* = b_i \quad ; \quad i = 1,\ldots,M$$

und (2.2.6)

$$p_i^* = 0 \quad ; \quad i = M+1,\ldots,N \quad .$$

Das bedeutet, das PF-Filter $V(z) = 1 - P(z)$ ist invers zu dem Filter $B(z)$:

$$B(z) = \frac{1}{1 - P(z)} = V^{-1}(z) \quad . \qquad (2.2.7)$$

Die Umkehrung dieser Betrachtungen führt ebenfalls zu einer interessanten Beziehung:
Die Datenfolge $\{x_n\}$ gehöre zu einem autoregressiven Prozeß beliebig hoher Ordnung mit den als bekannt vorausgesetzten AKF-Werten $R_{xx}(k)$. Ein Prädiktor der Ordnung N wird optimal auf den Prozeß eingestellt. Es wird ein zu dem dazugehörigen PF-Filter inverses Filter $I(z) = V^{-1}(z)$ gebildet, das jetzt nicht mehr notwendig identisch mit dem Filter $B(z)$ des Prozesses ist. Wird das Filter $I(z)$ ebenfalls mit der unkorrelierten Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ gespeist, so weist die Ausgangsfolge $\{i_n\}$ nach Gl. 2.2.5 die AKF

$$R_{ii}(k) = \sum_{j=1}^{N} p_j^* \, R_{ii}(k-j) \quad ; \quad k \geq 1 \qquad (2.2.8)$$

auf. Aus den Bestimmungsgleichungen 2.1.7 ist sofort ersichtlich, daß die ersten N AKF-Werte der Folgen $\{x_n\}$ und $\{i_n\}$ identisch sind:

$$R_{ii}(k) = R_{xx}(k) \quad ; \quad k = 1,\ldots,N \quad . \qquad (2.2.9)$$

Das bedeutet, <u>das inverse Filter $I(z)$ vermittelt eine Nachbildung des beobachteten Prozesses</u> dadurch, daß es die ersten N "Filter-AKF-Werte" $R_{ii}(k)$ den beobachteten AKF-Werten $R_{xx}(k)$ gleichsetzt und kann daher als Modell des Prozesses verwendet werden (vgl. Bild 2.4).
Dieses Prinzip findet z.B. Anwendung in der Sprachanalyse und -synthese /5,6/ und zur autoregressiven Schätzung des Leistungsdichtespektrums (LDS) /15,16/. Bei dem zuletztgenannten Verfahren wird das LDS aus der Übertragungsfunktion des zu dem beobachteten Prozeß gehörenden inversen PF-Filters berechnet.

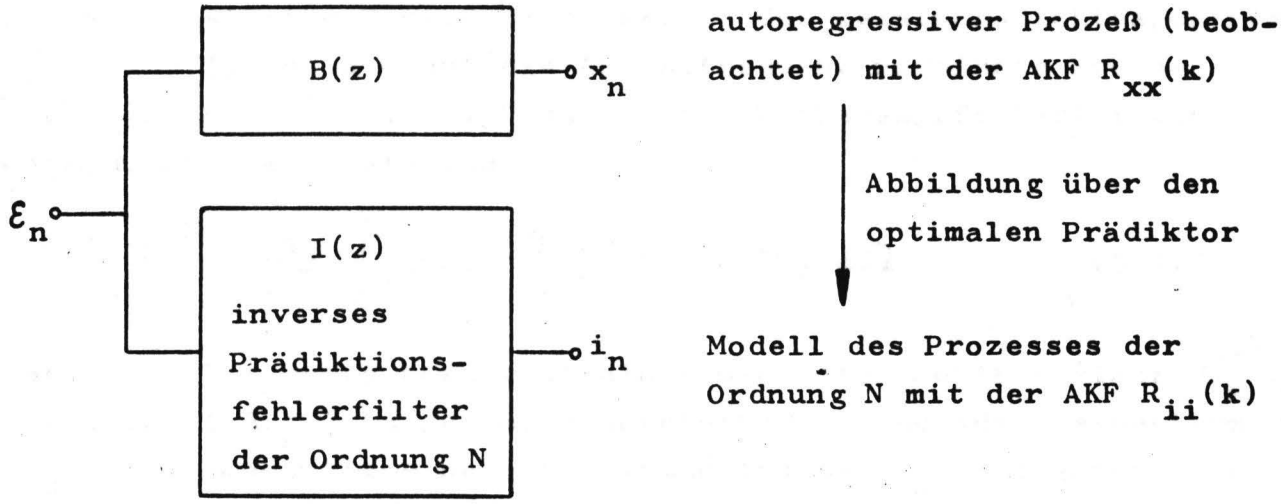

Bild 2.4 : Modell des autoregressiven Prozesses.

3. Zusammenhang zwischen dem Prädiktionsfehlerfilter und der Theorie der orthogonalen Polynome

Zwischen dem PF-Filter und der Theorie der auf dem Einheitskreis orthogonalen Polynome besteht ein enger Zusammenhang, der in diesem Abschnitt erläutert werden soll. Eine Reihe von sehr nützlichen Sätzen zu dieser Theorie /17/ kann so auch auf das PF-Filter angewendet werden.

3.1 Zusammenhang mit dem Prädiktionsfehlerfilter

Die Koeffizienten des PF-Filters N-ter Ordnung

$$V_N(z) = 1 + v_1 z^{-1} + \ldots + v_N z^{-N} \qquad (3.1.1)$$

werden so eingestellt, daß der kleinste mittlere quadratische Vorhersagefehler

$$\sigma_N^2 = E\left[\left(x_n + \sum_{i=1}^{N} v_i x_{n-i} \right)^2 \right] \qquad (3.1.2)$$

auftritt. Diese Aufgabe läßt sich auch im Frequenzbereich formulieren:
Der stochastische Prozeß $\{X_n\}$ besitze das Leistungsdichtespektrum $S_{xx}(e^{j\Omega})$; Ω ist die auf die Abtastfrequenz normierte Kreisfrequenz ($\Omega = -\pi \ldots \pi$). Dann ist die Vorhersagefehlerleistung auch durch die Darstellung

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |V_N(e^{j\Omega})|^2 \, S_{xx}(e^{j\Omega}) \, d\Omega \qquad (3.1.3)$$

gegeben /17/. Durch Forderung einer minimalen Fehlervarianz σ_N^2 ist nach Gl.3.1.3 zu jedem vorgegebenen Leistungsdichtespektrum $S_{xx}(e^{j\Omega})$ eindeutig eine Schar von Polynomen $V_N(z)$ gegeben, die die Übertragungsfunktion des PF-Filters N-ter Ordnung angeben.

Definiert man nun eine Abbildung des Polynoms $V_N(z)$ auf das Polynom $G_N(z)$ durch

$$G_N(z) = V_N(z) \, z^N \quad , \qquad (3.1.4)$$

so läßt sich zeigen, daß diese Polynome folgende Bedingungen erfüllen (vgl. Anhang, Abschnitt 1.A) :

I) $G_N(z)$ ist ein Polynom in z vom Grad N; der Koeffizient von z^N weist den Wert Eins auf.

II) Die Polynome $G_N(z)$ erfüllen die Orthogonalitätsbeziehung

$$[G_M(z), G_N(z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_M(e^{j\Omega}) G_N(e^{-j\Omega}) \, S_{xx}(e^{j\Omega}) \, d\Omega = 0 \quad ; \quad \text{für } M \neq N \, . \qquad (3.1.5)$$

Die Polynome $G_N(z)$ bilden also bezüglich der vorgegebenen Leistungsdichte $S_{xx}(e^{j\Omega})$ <u>ein auf dem Einheitskreis orthogonales Polynomensystem.</u>

Häufig wird auch von einem <u>orthonormalen Polynomensystem $\Phi_N(z)$</u> ausgegangen /17/, das die Bedingung

$$[\Phi_M(z), \Phi_N(z)] = \delta_{MN} \qquad (3.1.6)$$

erfüllt, d.h., die Forderung, der Koeffizient von z^N sei Eins, entfällt dann. Mit Gl. 3.1.3 und 3.1.4 ist dann folgende Beziehung gültig :

$$\Phi_N(z) = \frac{1}{\sigma_N} G_N(z) = \frac{1}{\sigma_N} z^N V_N(z) \quad . \qquad (3.1.7)$$

Das Prädiktionsfehlerfilter N-ter Ordnung $V_N(z)$ und damit auch das dazugehörige Polynom $G_N(z)$ sind eindeutig durch die ersten N+1 AKF-Werte $R_{xx}(0),\ldots,R_{xx}(N)$ festgelegt. Es läßt sich daher auch eine explizite Darstellung der Polynome $V_N(z)$ und $G_N(z)$ angeben, die nur auf den AKF-Werten beruht (vgl. Anhang, Abschnitt 2.A) .

3.2 Stabilität des inversen Prädiktionsfehlerfilters

Die im vorigen Abschnitt dargestellten Beziehungen ermöglichen eine Vielzahl von wichtigen Aussagen über das PF-Filter.
Ein wichtiges Problem ist z.B. die Frage der Stabilität des zum PF-Filter inversen Filters $V_N^{-1}(z)$, das als Modell des beobachteten Prozesses verwendet wird. Seine Übertragungsfunktion

$$V_N^{-1}(z) = \frac{z^N}{z^N + v_1 z^{N-1} + \ldots + v_N} \qquad (3.2.1)$$

steht in folgender Beziehung zum Polynom $\Phi_N(z)$ (vgl. Gl. 3.1.7) :

$$V_N^{-1}(z) = \frac{1}{\sigma_N} \frac{z^N}{\Phi_N(z)} \quad . \qquad (3.2.2)$$

Für das orthogonale Polynom $\Phi_N(z)$ gilt, daß alle seine Nullstellen innerhalb des Einheitskreises liegen /17, S.40/.

Das inverse PF-Filter ist daher immer stabil. Instabilitäten können nur durch unzureichende Rechengenauigkeit bei der Bestimmung der Filterkoeffizienten oder durch Fehler bei der Messung der Autokorrelationsfunktion auftreten.

4. Rekursive Lösung zur Bestimmung der Koeffizienten des Prädiktionsfehlerfilters und Interpretation des Verfahrens

4.1 Rekursive Lösung

Die gesuchten Koeffizienten des PF-Filters $V_N(z)$ können durch Lösung des Gleichungssystems 2.1.7 z.B. nach dem Verfahren des Gauss-Jordan-Algorithmus bestimmt werden. Während dieses Rechenverfahren Multiplikationen in der Größenordnung N^3 verlangt, kann der Rechenaufwand durch Verwendung anderer Verfahren, die die Struktur der Autokovarianzmatrix ausnutzen, weiter reduziert werden.
Für symmetrische Matrizen ist eine Verringerung des Rechenaufwandes etwa auf die Hälfte möglich /18/; eine weitergehende Reduktion ist durch Ausnutzung der streifensymmetrischen Struktur der Autokovarianzmatrix erreichbar. Auf Grund dieser Toeplitz-Struktur der Matrix ist ein rekursives Rechenverfahren anwendbar, das nur noch eine Zahl von Multiplikationen in der Größenordnung N^2 benötigt.
Ein Vergleich der bei den verschiedenen Verfahren benötigten Rechenzeiten ist in /14/ zu finden.

Das rekursive Verfahren berechnet nacheinander PF-Filter $V_N(z)$ zunehmender Länge. Es wurde zuerst von Levinson /7/ und später auch von weiteren Autoren /5,8,9/ mit unterschiedlichem Beweisgang angegeben.
Das rekursive Verfahren folgt direkt aus der Theorie der orthogonalen Polynome /9,19/ : Grenander und Szegö /17/ geben die Rekursionsbeziehung

$$k_{N-1}\,\Phi_N(z) = k_N\, z\,\Phi_{N-1}(z) + l_N\, z^{N-1}\,\Phi_{N-1}(z^{-1}) \qquad (4.1.1)$$

an, wobei die Konstanten l_N und k_N die Koeffizienten der kleinsten und größten Ordnung im Polynom

$$\Phi_N(z) = k_N\, z^N + \ldots + l_N \qquad (4.1.2)$$

sind.
Da $\Phi_N(z)$ direkt die Koeffizienten des PF-Filters $V_N(z)$ festlegt, ergibt sich daher, daß der N-stufige Prädiktor aus dem Koeffizientensatz des Prädiktors (N-1)-ter Ordnung berechnet werden

kann.

Nach Zwischenrechnung /19/ entsteht so folgender Lösungsmechanismus :

Es sei das PF-Filter (N-1)-ter Ordnung $V_{N-1}(z)$ mit den optimalen Koeffizienten $v_1^{(N-1)}, \ldots, v_{N-1}^{(N-1)}$ aus den AKF-Werten $R_{xx}(0) \ldots R_{xx}(N-1)$ berechnet worden. Die Vorhersagefehlerleistung σ_{N-1}^2 sei ebenfalls bestimmt worden. Dann wird der Koeffizientensatz für das PF-Filter N-ter Ordnung $V_N(z)$ (Koeffizienten $v_1^{(N)} \ldots v_N^{(N)}$) in der angegebenen Reihenfolge berechnet durch :

$$R_S(N) = -(R_{xx}(N-1)\, v_1^{(N-1)} + \ldots + R_{xx}(1)\, v_{N-1}^{(N-1)}), \qquad (4.1.3)$$

$$\Delta R(N) = R_{xx}(N) - R_S(N) \quad , \qquad (4.1.4)$$

$$v_N^{(N)} = -\Delta R(N) \,/\, \sigma_{N-1}^2 \quad , \qquad (4.1.5)$$

$$\sigma_N^2 = \sigma_{N-1}^2 \left(1 - \left[v_N^{(N)} \right]^2 \right) \quad , \qquad (4.1.6)$$

$$\begin{bmatrix} v_1^{(N)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{N-1}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{(N-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{N-1}^{(N-1)} \end{bmatrix} + v_N^{(N)} \begin{bmatrix} v_{N-1}^{(N-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_1^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad ; \qquad (4.1.7)$$

mit den Anfangswerten

$$\sigma_0^2 = R_{xx}(0) \quad \text{und} \quad R_S(1) = 0 \quad . \qquad (4.1.8)$$

4.2 Interpretation des Verfahrens

Die bei der rekursiven Lösung auftretenden Größen können in folgender Weise interpretiert werden:

1) $\underline{R_S(N)}$:

$R_S(N)$ wäre derjenige AKF-Wert $R_{xx}(N)$, der auftreten würde, wenn der Prozeß auf einen autoregressiven Prozeß (N-1)-ter Ordnung zurückzuführen ist (vgl. Gl. 2.2.5). In diesem Fall sind nämlich die bisher berechneten Koeffizienten $-v_i^{(N-1)}$ mit den Filterkoeffizienten des Prozeß-Modells identisch (s. Abschnitt 2.2.2). $R_S(N)$ läßt sich somit als Schätzwert für den AKF-Wert $R_{xx}(N)$ deuten.

2) $\underline{\Delta R(N)}$:

$\Delta R(N)$ gibt die Abweichung zwischen dem Schätzwert $R_S(N)$ und dem tatsächlichen Wert $R_{xx}(N)$ an.

3) $\underline{v_N^{(N)}}$:

Die Größe $v_N^{(N)}$ ist der neu hinzugekommene Koeffizient bei Erhöhung der Ordnung des Filters um Eins. Er weist den Wert Null auf, wenn $\Delta R(N) = 0$ ist, d.h., wenn die AKF-Werte $R_{xx}(0)$ ... $R_{xx}(N)$ einem autoregressiven Prozeß (N-1)-ter Ordnung zugeordnet werden können. Ebenso bleiben dann die Werte $v_1, \ldots, v_{N-1}$ unverändert.

4) $\underline{\sigma_N^2}$:

σ_N^2 ist die Fehlerleistung des PF-Filters N-ter Ordnung.
Es gilt stets

$$\sigma_N^2 \leq \sigma_{N-1}^2 \quad . \tag{4.2.1}$$

σ_N^2 erreicht den Wert Null, wenn ein Koeffizient $\left| v_N^{(N)} \right| = 1$ errechnet wird.

Es zeigt sich also, daß eine große Erhöhung des Prädiktionsgewinns gerade dann erreicht wird, wenn der AKF-Wert $R_{xx}(N)$ stark von seinem Schätzwert $R_S(N)$ abweicht.

Die Vorhersagefehlerleistung ist stets positiv; daraus ergibt sich:

$$\left| v_N^{(N)} \right| \leq 1 \quad ; \forall N \quad . \tag{4.2.2}$$

Der Koeffizient der höchsten Ordnung des PF-Filters kann also dem Betrage nach niemals größer als Eins sein.

5. Definition und Bestimmung der PARCOR-Koeffizienten

5.1 Definition der PARCOR-Koeffizienten

Der optimale Prädiktor wird aus der Autokorrelationsfunktion $R_{xx}(k)$ des stationären stochastischen Prozesses berechnet. Für die normierte Autokorrelationsfunktion

$$r(k) = R_{xx}(k)/R_{xx}(0) \tag{5.1.1}$$

gilt dabei die Beziehung

$$|r(k)| \leq 1 \quad . \tag{5.1.2}$$

Alle Werte der normierten AKF liegen innerhalb des Intervalls $[-1, 1]$. Zu dieser Einschränkung tritt eine weitere Bedingung hinzu: Die Autokovarianzmatrix muß positiv-semidefinit sein /10/. Diese Forderung ist nur erfüllt, wenn die Determinante der Autokovarianzmatrix (Toeplitzdeterminante)

$$D_k = \begin{vmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots & R_{xx}(k) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(k-1) \\ & & \ddots & \\ R_{xx}(k) & R_{xx}(k-1) & \dots & R_{xx}(0) \end{vmatrix} \geq 0 \tag{5.1.3}$$

nichtnegativ ist /10/.

Für den Fall k=2 ergeben sich aus Gl. 5.1.3 die Grenzkurven

$$r(1) = \pm \sqrt{0.5(1 + r(2))} \quad \text{und} \quad r(2) = 1 \tag{5.1.4}$$

innerhalb deren die normierten AKF-Werte r(1), r(2) liegen müssen, um die Eigenschaft einer positiv-semidefiniten Autokovarianzmatrix zu gewährleisten. Dieser zulässige Bereich ist in Bild 5.1 schraffiert eingezeichnet.

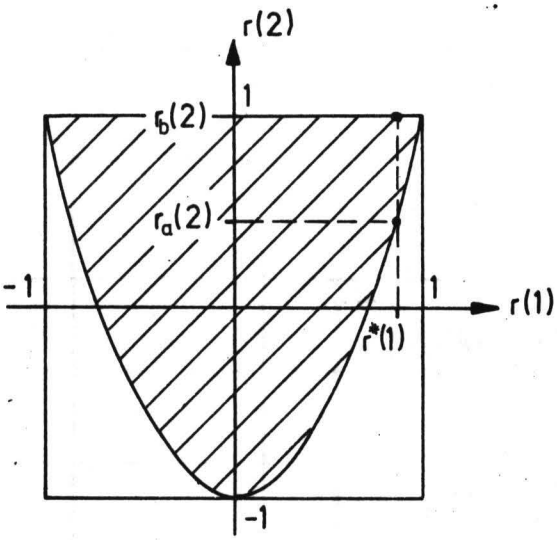

Bild 5.1 : Zulässiger Wertebereich für die normierten AKF-Werte r(1) und r(2).

Wird z.B. ein AKF-Wert $r(1)=r^*(1)$ vorgegeben, so muß der AKF-Wert r(2) einen Wert zwischen $r_a(2)$ und $r_b(2)$ annehmen.

Entsprechende Bedingungen gelten auch für beliebige AKF-Werte r(k). Sind die ersten k-1 AKF-Werte r(1), ..., r(k-1) gegeben, so gilt für r(k) (vgl. Bild 5.2)

$$r_a(k) \leq r(k) \leq r_b(k) \quad . \tag{5.1.5}$$

Der in Bild 5.2 eingezeichnete Wert $r_S(k)$ ist das arithmetische Mittel der Grenzen $r_a(k)$ und $r_b(k)$,

$$r_S(k) = \frac{1}{2}\left[r_a(k) + r_b(k)\right] \quad , \tag{5.1.6}$$

und kann als Schätzgröße für r(k) aufgefaßt werden. Der tatsächliche AKF-Wert r(k) weist eine Differenz

$$\Delta r(k) = r(k) - r_S(k) \tag{5.1.7}$$

zum Schätzwert auf; die maximal mögliche Abweichung ist

$$\Delta r_{max}(k) = r_b(k) - r_S(k) = \frac{1}{2}\left[r_b(k) - r_a(k)\right] \quad . \tag{5.1.8}$$

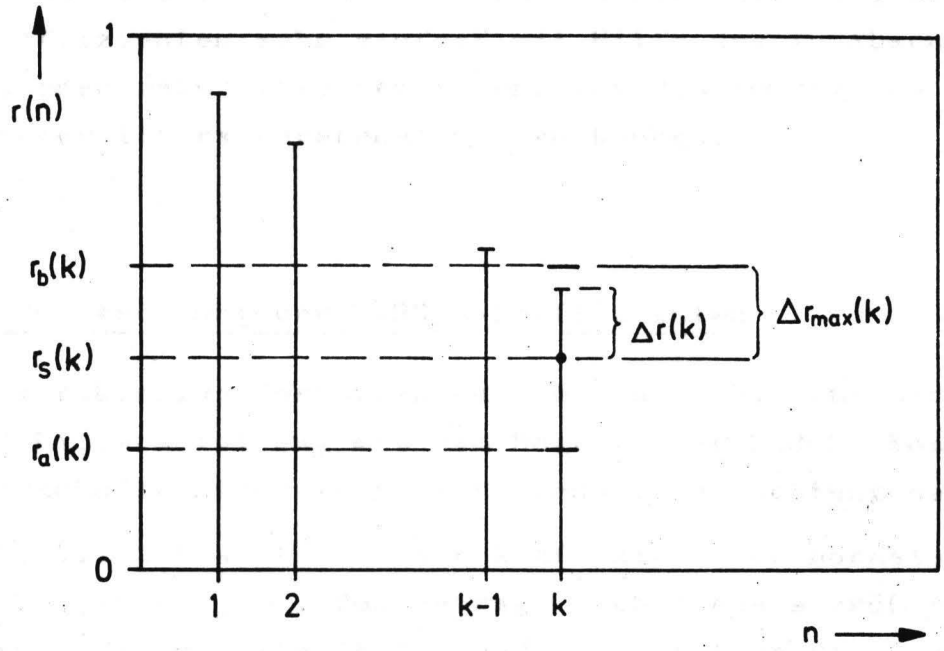

Bild 5.2 : Grenzen für den AKF-Wert r(k).

Als PARCOR-Koeffizient $\pi(k)$ (Partieller Autokorrelationskoeffizient) wird nun die Abweichung des AKF-Wertes r(k) von seinem Schätzwert $r_S(k)$, normiert auf die maximal mögliche Abweichung, definiert:

$$\pi(k) = \frac{\Delta r(k)}{\Delta r_{max}(k)} \quad . \qquad (5.1.9)$$

Der PARCOR-Koeffizient $\pi(k)$ läßt sich also als redundanzfreie Abbildung des Autokorrelationskoeffizienten r(k) deuten, da $\pi(k)$ nur noch den interessanten zulässigen Wertebereich von r(k) beschreibt. Der Wertebereich von $\pi(k)$ ist dabei auf

$$-1 \leq \pi(k) \leq 1$$

beschränkt. Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend für eine positiv-semidefinite Autokovarianzmatrix.

Die Grenzen $r_a(k)$ und $r_b(k)$ können aus der Forderung einer positiven Determinante D_k, Gl. 5.1.3, ermittelt werden. Die

Berechnung erweist sich jedoch für größere Werte von k als umständlich. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß die PARCOR-Koeffizienten sehr einfach mit Hilfe des in Abschnitt 4.1 angegebenen rekursiven Verfahrens zur Bestimmung des Prädiktionsfehlerfilters berechnet werden können.

5.2 Berechnung der PARCOR-Koeffizienten

Das rekursive Verfahren aus Abschnitt 4.1 zur Berechnung des PF-Filters ist eng mit dem Begriff der PARCOR-Koeffizienten verknüpft. Dies wird aus folgender Betrachtung deutlich :

Gl. 4.2.2 besagt, daß der Koeffizient der höchsten Ordnung des PF-Filters $v_k^{(k)}$, dem Betrage nach niemals größer als Eins sein kann. Mit den Gln. 4.1.4 und 4.1.5 folgen die Schranken für den AKF-Wert $R_{xx}(k)$:

$$R_S(k) - \sigma_{k-1}^2 \leq R_{xx}(k) \leq R_S(k) + \sigma_{k-1}^2 \quad . \qquad (5.2.1)$$

$R_S(k)$ ist der AKF-Wert eines autoregressiven Prozesses der Ordnung k-1 ; σ_{k-1}^2 ist die Vorhersagefehlerleistung eines PF-Filters gleicher Ordnung. Gl. 5.2.1 zeigt, daß <u>die Vorhersagefehlerleistung σ_{k-1}^2 direkt den zulässigen Toleranzbereich für den nächsten AKF-Wert $R_{xx}(k)$ bestimmt</u>. Je stärker also ein Prozeß korreliert ist, um so enger sind die Schranken für die AKF-Werte.

Mit Gl. 5.2.1 ergeben sich für die in Abschnitt 5.1 definierten Schranken

$$r_a(k) = (R_S(k) - \sigma_{k-1}^2) / R_{xx}(0) \quad , \qquad (5.2.2)$$

$$r_b(k) = (R_S(k) + \sigma_{k-1}^2) / R_{xx}(0) \qquad (5.2.3)$$

und für den Schätzwert der AKF

$$r_S(k) = R_S(k) / R_{xx}(0) \quad . \qquad (5.2.4)$$

Mit den Gln. 5.1.7 bis 5.1.9 folgt für den PARCOR-Koeffizient

$$\pi(k) = \frac{R_{xx}(k) - R_S(k)}{\sigma_{k-1}^2} \quad . \qquad (5.2.5)$$

Die Interpretation der Gl. 5.2.5 zeigt, daß der PARCOR-Koeffizient $\pi(k)$ die Abweichung der Korrelation von dem zu erwartenden AKF-Wert $R_S(k)$ angibt, der sich einstellen würde, wenn der beobachtete Prozeß auf einen autoregressiven Prozeß der Ordnung k-1 zurückzuführen ist.

Der Vergleich von Gl. 4.1.5 mit Gl. 5.2.5 ergibt, daß

$$\pi(k) = -v_k^{(k)} \quad . \qquad (5.2.6)$$

Die PARCOR-Koeffizienten sind also jeweils identisch mit den negativen Koeffizienten der höchsten Ordnung des PF-Filters und werden daher bei dem rekursiven Lösungsalgorithmus automatisch mitberechnet.

Die Vorhersagefehlerleistung σ_k^2 wird direkt durch die PARCOR-Koeffizienten bestimmt. Mit den Gln. 4.1.6 und 4.1.8 ergibt sich

$$\sigma_k^2 = R_{xx}(0) \prod_{i=1}^{k} \left[1 - \pi^2(i)\right] \quad . \qquad (5.2.7)$$

Da die PARCOR-Koeffizienten $\pi(k)$ ausschließlich aus den AKF-Werten $R_{xx}(k)$ berechnet werden, läßt sich auch eine Darstellung für $\pi(k)$ angeben, die auf aus der Autokovarianzmatrix abgeleiteten Determinanten beruht. Man erhält

$$\pi(k) = \frac{D_k^*}{D_{k-1}} \quad . \qquad (5.2.8)$$

D_k ist die Toeplitzdeterminante (Gl. 5.1.3), D_k^* ist die negative Adjunkte zum Element $R_{xx}(k)$ in der ersten Zeile und letzten Spalte der Toeplitzdeterminante D_k (Beweis im Anhang, Abschnitt 3.A). Für die praktische Berechnung von $\pi(k)$ ist aber die Auswertung nach Gl. 5.2.5 vorzuziehen.

5.2.1 Verwendung der PARCOR-Koeffizienten zur Prozeßbeschreibung

Das PF-Filter wird durch seinen Koeffizientenvektor

$$\underline{v}_k^T = (1, v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \ldots , v_k^{(k)}) \qquad (5.2.9)$$

beschrieben. Es kann aber ebenso durch den Vektor der normierten AKF-Werte

$$\underline{r}_k^T = (r(1), r(2), \ldots , r(k)) \qquad (5.2.10)$$

oder durch den Vektor der PARCOR-Koeffizienten

$$\underline{\pi}_k^T = (\pi(1), \pi(2), \ldots , \pi(k)) \qquad (5.2.11)$$

festgelegt werden. Alle drei Beschreibungen sind äquivalent und können umkehrbar eindeutig ineinander überführt werden*. Die Angabe des PARCOR-Vektors bietet jedoch in vielen praktischen Anwendungsfällen Vorteile, wenn die Parameter nur mit endlicher Auflösung (digital) repräsentiert werden können.
Bei der Digitalisierung (Quantisierung) der Parametervektoren treten Rundungsfehler auf, die dazu führen können, daß das dazugehörige inverse PF-Filter instabil ist. Bei der Quantisierung der PARCOR-Koeffizienten läßt sich diese Gefahr leicht ausschalten, wenn der Quantisierungsbereich so gewählt wird, daß die Bedingung $|\pi(k)| \leq 1$ stets erfüllt ist.
Als zusätzlicher Vorteil erweist sich die Eigenschaft der PARCOR-Koeffizienten, eine redundanzfreie Abbildung der AKF-Werte darzustellen. Gerade bei hohen Korrelationen ist die Vorhersagefehlerleistung σ_k^2 und damit die Toleranzbreite der AKF-Werte, $2\sigma_k^2$ (vgl. Gl. 5.2.1), sehr klein; die AKF-Werte müßten im Vergleich zu den PARCOR-Koeffizienten sehr viel genauer quantisiert werden, um den gleichen Fehler im Koeffizientensatz des PF-Filters hervorzurufen. Als Anwendungsbeispiel sei die ADPCM-Codierung mit vor-

---

*Die Vektoren $\underline{v}_k$ und $\underline{\pi}_k$ folgen direkt aus $\underline{r}_k$ durch Anwendung des rekursiven Verfahrens aus Abschnitt 4.1 . Bei Vorgabe des Vektors $\underline{\pi}_k$ können die beiden übrigen Vektoren ebenfalls mittels des rekursiven Verfahrens bestimmt werden, wenn zuerst Gl. 4.1.5 und dann Gl. 4.1.4 ausgewertet wird. Wird der Vektor $\underline{v}_k$ vorgegeben, so werden zunächst die AKF-Werte $\underline{r}_k$ berechnet (vgl. Abschnitt 2.2.1) und dann die PARCOR-Koeffizienten $\underline{\pi}_k$.

laufender Analyse genannt, bei der in bestimmten Zeitabständen die Prädiktorparameter vom Codierer zum Decodierer übertragen werden müssen. Die Verwendung des PARCOR-Vektors als Parametersatz erweist sich als gut geeignet /3/.

5.3 Messung der PARCOR-Koeffizienten aus Vorwärts- und Rückwärtsprädiktion

Die PARCOR-Koeffizienten können nicht nur berechnet, sondern auch direkt durch Filterung der Musterfolge gemessen werden.
Zur Messung des PARCOR-Koeffizienten $\pi(k)$ werden zwei PF-Filter der Ordnung k-1 benötigt /13/, die unter Kenntnis der AKF-Werte r(1), ... , r(k-1) berechnet werden. Das eine PF-Filter dient zur Vorwärtsprädiktion; es liefert den Schätzfehler bei der Schätzung von x_n aus x_{n-1} , ... , x_{n-k+1} . Das andere PF-Filter führt eine Rückwärtsprädiktion durch; es erzeugt am Ausgang den Schätzfehler bei der Schätzung von x_{n-k} aus den gleichen Daten x_{n-k+1} , ... , x_{n-1} . Die Meßanordnung mit den beiden PF-Filtern ist in Bild 5.3 gezeigt.

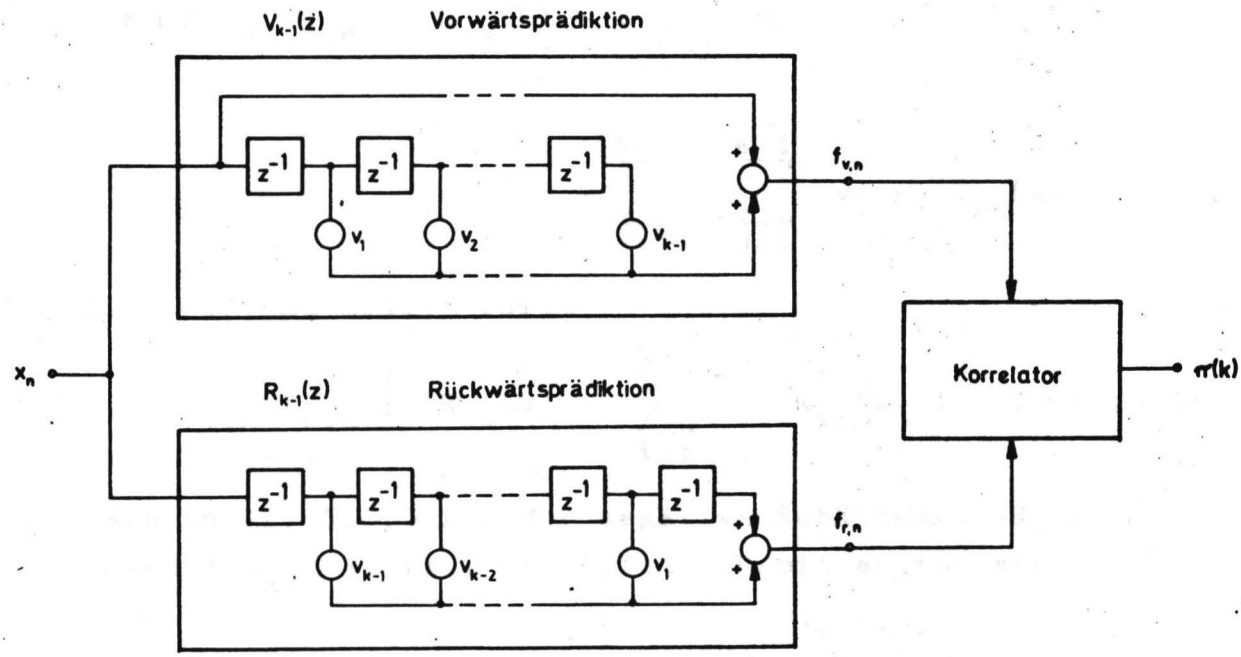

Bild 5.3 : Messung des PARCOR-Koeffizienten $\pi(k)$ aus Vorwärts- und Rückwärtsprädiktion .

Der Schätzfehler bei der Vorwärtsprädiktion ist

$$f_{v,n} = x_n + \sum_{i=1}^{k-1} v_i \, x_{n-i} \quad ; \tag{5.3.1}$$

bei der Rückwärtsprädiktion entsteht der Schätzfehler

$$f_{r,n} = x_{n-k} + \sum_{j=1}^{k-1} v_j \, x_{n-k+j} \quad . \tag{5.3.2}$$

Der PARCOR-Koeffizient $\pi(k)$ ist der <u>Korrelationskoeffizient der Fehlerfolgen $f_{v,n}$ und $f_{r,n}$</u> :

$$\pi(k) = \frac{E\,[f_{v,n}\, f_{r,n}]}{\sqrt{E\,[f_{v,n}^2]\, E\,[f_{r,n}^2]}} \quad . \tag{5.3.3}$$

Die Richtigkeit der Gl. 5.3.3 kann durch folgende Betrachtung eingesehen werden:
Der Prozeß $\{X_n\}$ sei stationär, dann weisen die Fehlerfolgen $f_{v,n}$ und $f_{r,n}$ die gleiche Varianz auf :

$$E\,[f_{v,n}^2] = E\,[f_{r,n}^2] = \sigma_{k-1}^2 \tag{5.3.4}$$

Aus dem Zähler von Gl. 5.3.3 wird

$$E\,[f_{v,n}\, f_{r,n}] = R_{xx}(k) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} v_i \, R_{xx}(k-i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} v_i \, v_j \, R_{xx}(k-i-j) \quad .$$

Mit Gl. 2.1.7 und 2.1.11 folgt

$$E\,[f_{v,n}\, f_{r,n}] = R_{xx}(k) + \sum_{i=1}^{k-1} v_i \, R_{xx}(k-i) \quad . \tag{5.3.5}$$

Die Summe in Gl. 5.3.5 ist der negative Schätzwert $-R_S(k)$ für den AKF-Wert $R_{xx}(k)$, vgl. Gl. 4.1.3 . Damit ergibt sich

schließlich :

$$\frac{E\,[f_{v,n}\,f_{r,n}]}{\sqrt{E\,[f_{v,n}^2]\,E\,[f_{r,n}^2]}} = \frac{R_{xx}(k) - R_S(k)}{\sigma_{k-1}^2} \,. \qquad (5.3.6)$$

Die rechte Seite der Gl. 5.3.6 ist gleich dem PARCOR-Koeffizienten $\pi(k)$ (vgl. Gl. 5.2.5).

Die Meßanordnung nach Bild 5.3 läßt sich folgendermaßen interpretieren: Der Autokorrelationskoeffizient r(k) gibt die Korrelation zwischen den Abtastwerten x_n und x_{n-k} an. Der Wert r(k) ist aber mit Redundanz behaftet, da er auch von den AKF-Werten r(j), j<k abhängt (vgl. Abschnitt 5.1). Diese können verwendet werden, um einen optimalen Prädiktor zu berechnen, mit dem die Abtastwerte x_n und x_{n-k} aus den dazwischenliegenden Abtastwerten x_{n-1}, x_{n-2}, ... , x_{n-k+1} linear geschätzt werden. Dadurch kann die Redundanz durch Kenntnis der AKF-Werte r(j), j<k entfernt werden. Der Korrelationskoeffizient der Schätzfehlerfolgen aus Vorwärts- und Rückwärtsprädiktion, der PARCOR-Koeffizient $\pi(k)$, enthält dann nur noch die interessante von Redundanz befreite Information.

6. Anwendungen und Beispiele für die PARCOR-Koeffizienten

6.1 Realisierung des Prädiktionsfehlerfilters in einer Kreuzglied-Kaskadenschaltung

Als Filterstruktur für das PF-Filter $V_k(z)$ ist bisher stets nur die "direkte" Form nach Bild 2.1 und 2.2 angegeben worden, in der die Filterkoeffizienten die Koeffizienten aus der Übertragungsfunktion $V_k(z)$ sind. Für das PF-Filter kann aber auch eine Filterstruktur angegeben werden, die als Filterkoeffizienten ausschließlich die PARCOR-Koeffizienten enthält /13/. Das Filter besteht aus einer Kaskade von Kreuzgliedschaltungen. Seine Struktur ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Das PF-Filter für Vorwärtsprädiktion besitzt die Übertragungsfunktion

$$V_k(z) = 1 + v_1 z^{-1} + \ldots + v_k z^{-k} \quad , \qquad (6.1.1)$$

für das PF-Filter für Rückwärtsprädiktion gilt entsprechend (vgl. Abschnitt 5.3)

$$R_k(z) = z^{-k-1} + v_1 z^{-k} + \ldots + v_k z^{-1} \quad . \qquad (6.1.2)$$

Der rekursive Algorithmus aus Abschnitt 4.1 ergibt für die Übertragungsfunktionen die Rekursionsbeziehungen

$$V_k(z) = V_{k-1}(z) - \pi(k)\, R_{k-1}(z) \qquad (6.1.3)$$

und

$$R_k(z) = z^{-1} \left[R_{k-1}(z) - \pi(k)\, V_{k-1}(z) \right] \quad , \qquad (6.1.4)$$

mit den Anfangswerten

$$V_0(z) = 1 \quad \text{und} \quad R_0(z) = z^{-1} \quad . \qquad (6.1.5)$$

Diese Rekursionsbeziehungen führen direkt auf die Realisierung des PF-Filters $V_k(z)$ in einer Kaskadenschaltung von Kreuzglied-Filterstrukturen (Bild 6.1).

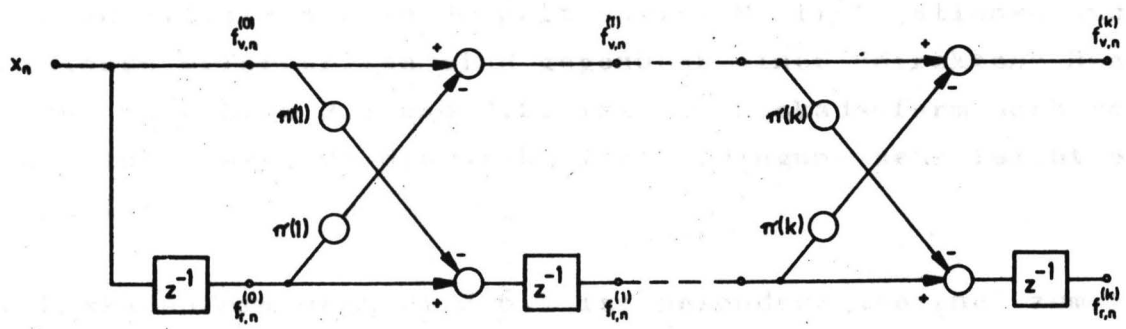

Bild 6.1 : Realisierung des Prädiktionsfehlerfilters in einer Kreuzglied-Kaskadenschaltung .

Erhöht man die Ordnung des PF-Filters um Eins, so wird entsprechend den Gln. 6.1.3 und 6.1.4 eine weitere Filter-Kaskade angeschaltet. Die Größen $f_{v,n}^{(j)}$ und $f_{r,n}^{(j)}$ sind die Vorhersagefehler bei Vorwärts- und Rückwärtsprädiktion unter Verwendung eines PF-Filters der Ordnung j.
Das Filter führt von Kaskade zu Kaskade eine schrittweise Dekorrelation des Eingangssignals x_n durch.
Soll nur das PF-Filter für Vorwärtsprädiktion $V_k(z)$ realisiert werden, so ist die Filtereingangsfolge x_n und die Filterausgangsfolge $f_{v,n}^{(k)}$. In der letzten Filterkaskade (vgl. Bild 6.1) entfällt dann der untere Zweig, der nur zur Erzeugung der Fehlerfolge $f_{r,n}^{(k)}$ bei Rückwärtsprädiktion dient.

Zum Aufbau des PF-Filters $V_k(z)$ müssen die PARCOR-Koeffizienten $\pi(j)$, j=1...k bekannt sein. Sie können z.B. aus den AKF-Werten des zu filternden Prozesses mittels des in Abschnitt 4.1 angegebenen rekursiven Verfahrens berechnet werden.

Für das <u>inverse PF-Filter</u> läßt sich eine ganz ähnliche Filterstruktur angeben, in der die Filterkoeffizienten ebenfalls die PARCOR-Koeffizienten sind /13/. Bei dieser Realisierung entfallen alle Stabilitätsprobleme infolge Digitalisierung der Filterkoeffizienten, denn die notwendige Bedingung $|\pi(k)| \leq 1$ (vgl. Abschnitt 5.2) läßt sich leicht einhalten.
Obwohl also für die Kaskadenform des PF-Filters bzw. des dazu inversen Filters nahezu doppelt soviel Multiplikationen und Additionen erforderlich sind gegenüber einer "direkten" Realisierung nach Bild 2.1 und 2.2, ist die Kaskadenform doch von großem Interesse, da die Stabilitätsbedingung sehr leicht einzuhalten ist.

Die Kaskadenform nach Bild 6.1 ist besonders geeignet zum Aufbau von <u>adaptiven PF-Filtern</u>, z.B. in Vocodersystemen /13/. Dazu ist es nicht notwendig, die PARCOR-Koeffizienten vor dem Aufbau des Filters aus den AKF-Werten zu berechnen: Die PARCOR-Koeffizienten können ja auch durch Messung des Korrelationskoeffizienten der Fehlerfolgen bei Vorwärts- und Rückwärtsprädiktion (Abschnitt 5.3) bestimmt werden. Die Kaskadenform des PF-Filters liefert andererseits genau diese Fehlerfolgen. Dadurch ist ein schrittweiser

Aufbau des PF-Filters möglich:
Zur Erhöhung der Ordnung von k auf k+1 wird der Korrelationskoeffizient der Fehlerfolgen $f_{v,n}^{(k)}$ und $f_{r,n}^{(k)}$ über eine gewisse Zeit gemessen; dieser Wert ist der PARCOR-Koeffizient $\pi(k+1)$ und gleichzeitig der Filterkoeffizient für die nächste Kaskade, die nun zusätzlich angeschaltet werden kann. Das Verfahren wird entsprechend fortgesetzt, bis die gewünschte Ordnung erreicht ist. Der dabei nötige Hardware-Aufwand ist gegenüber der "direkten" Form des PF-Filters erheblich geringer, da ein Rechenwerk zur Bestimmung der Filterkoeffizienten aus den AKF-Werten nun nicht mehr benötigt wird.

6.2 PARCOR-Koeffizienten für autoregressive Prozesse endlicher und unendlicher Ordnung (Beispiele)

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele zu den bisher definierten Größen angegeben. Der beobachtete Prozeß besteht aus einer Folge von Abtastwerten eines Sprachsignals (Abtastfrequenz 8 kHz). Aus dieser Folge wurden Langzeitparameter wie mittlere AKF und mittleres Leistungsdichtespektrum berechnet. Aus der AKF oder dem Leistungsdichtespektrum lassen sich Modelle für den beobachteten Prozeß ermitteln.

6.2.1 Autoregressiver Prozeß endlicher Ordnung

Das inverse PF-Filter bildet ein Modell des beobachteten Prozesses (vgl. Abschnitt 2.2.2). Für ein Modell der Ordnung 8 wurden aus den ersten 8 AKF-Werten r(i) des Sprachsignals die Filterkoeffizienten v_i und die PARCOR-Koeffizienten $\pi(i)$ berechnet (Tabelle 6.1).
In Bild 6.2 sind in Ergänzung dazu die normierten AKF-Werte r(i), die PARCOR-Koeffizienten $\pi(i)$ und die auf die Varianz σ_x^2 des Prozesses normierte Vorhersagefehlerleistung σ_i^2/σ_x^2 für i=1,...,20 gezeigt. Die Punkte in der Darstellung für r(i) geben die Schätzwerte $r_s(i)$ an; die Balken kennzeichnen die unteren und oberen Schranken $r_a(i)$ und $r_b(i)$ (vgl. Abschnitt 5.1).
Die Darstellung macht noch einmal deutlich, daß die AKF von einem

i	r(i)	v_i	$\pi(i)$
1	0.8606	-1.6272	0.8606
2	0.6011	1.3321	-0.5375
3	0.3879	-0.9334	0.2984
4	0.2499	0.7910	-0.1298
5	0.1619	-0.8898	0.0398
6	0.0488	0.8051	-0.3442
7	-0.0785	-0.4270	0.1708
8	-0.1710	0.1602	-0.1602

Tabelle 6.1 : Normierte AKF-Werte r(i), Filterkoeffizienten v_i und PARCOR-Koeffizienten $\pi(i)$ für ein autoregressives Modell der Ordnung 8.

Fenster begleitet wird, in dem der jeweilige AKF-Wert r(i) liegen muß, um eine positiv-semidefinite Autokovarianzmatrix zu gewährleisten. Liegt der AKF-Wert r(i) weit von seinem Schätzwert $r_S(i)$ entfernt (z.B. im Bild für i=1), so weist der dazugehörige PARCOR-Koeffizient $\pi(i)$ einen großen Wert auf; die Vorhersagefehlerleistung σ_i^2 nimmt dabei stark ab.
Für i>8 ändern sich Vorhersagefehlerleistung und Fensterbreite der AKF nicht mehr, da das Modell die Ordnung 8 aufweist.
Die Schätzwerte $r_S(i)$ sind mit den AKF-Werten r(i) identisch, so daß alle PARCOR-Koeffizienten $\pi(i)$ für i>8 den Wert Null besitzen.

Diese Eigenschaft kann zur Schätzung der Ordnung eines autoregressiven Prozesses verwendet werden /10/:
Aus dem beobachteten Prozeß werden die AKF-Werte und daraus die PARCOR-Koeffizienten berechnet. Sind <u>alle</u> PARCOR-Koeffizienten $\pi(i)$ Null für i>N, so ist der Prozeß ein autoregressiver Prozeß der Ordnung N.

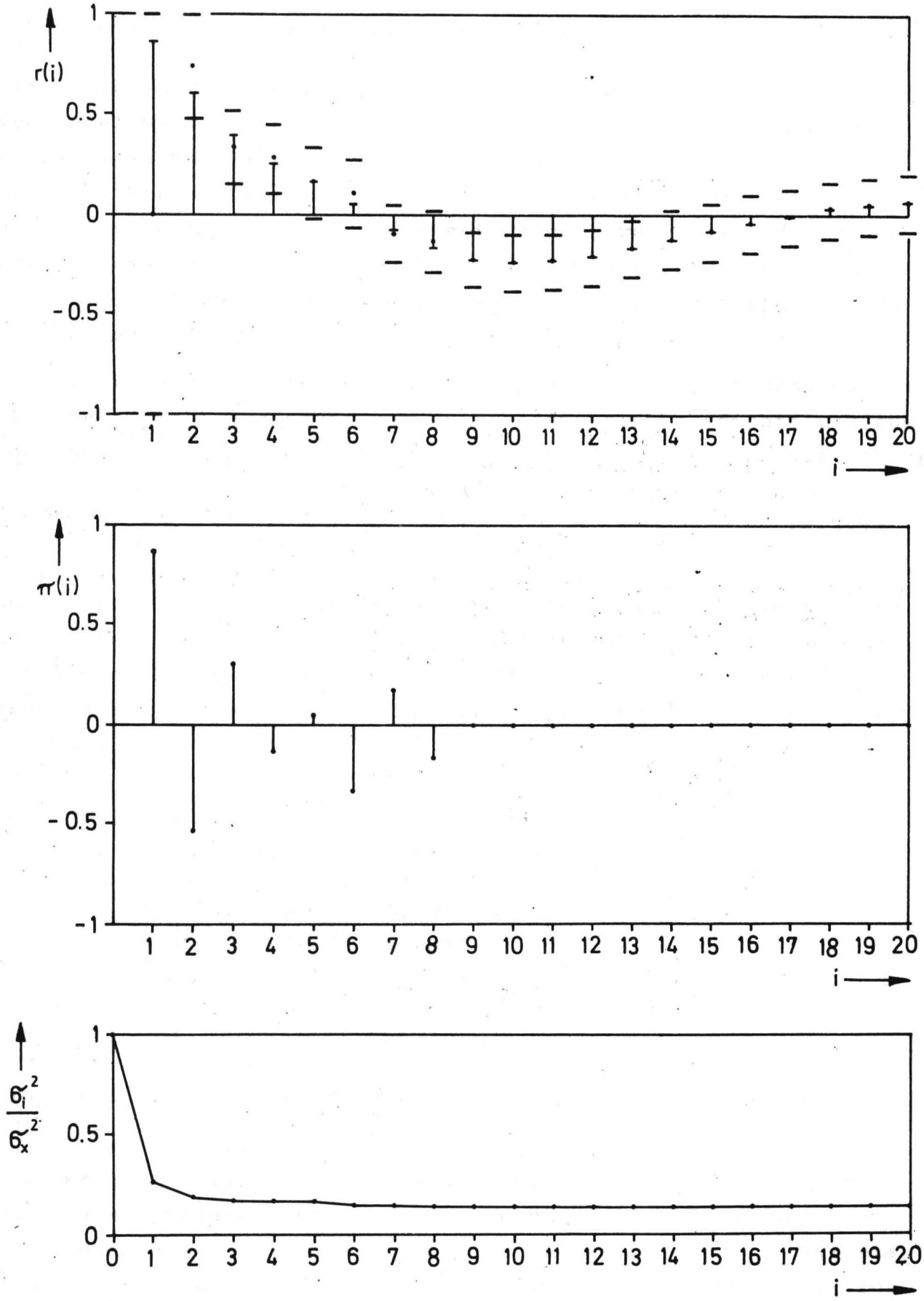

Bild 6.2 : Normierte AKF-Werte r(i), PARCOR-Koeffizienten $\pi(i)$ und normierte Vorhersagefehlerleistung σ_i^2/σ_x^2 für einen autoregressiven Prozeß der Ordnung 8.

6.2.2 Autoregressiver Prozeß unendlicher Ordnung

Als Prozeß-Modell soll nun nicht ein autoregressives Modell verwendet werden, sondern ein Modell, das in der Übertragungsfunktion sowohl Pole als auch Nullstellen aufweist (Hybrid-Modell). Dieses Hybrid-Modell kann durch ein autoregressives Modell beliebig genau approximiert werden, wenn die Ordnung des autoregressiven Modells genügend groß gewählt wird. Der dem Hybrid-Modell zugeordnete Prozeß kann daher als autoregressiver Prozeß unendlicher Ordnung betrachtet werden.

Das Hybrid-Modell wurde durch ein Approximationsverfahren nach Fletcher/Powell ausgehend vom gemessenen Leistungsdichtespektrum von Sprache gewonnen /20/. Es wird durch die Differenzengleichung

$$x_n = \varepsilon_n + \sum_{i=1}^{M} c_i \, \varepsilon_{n-i} + \sum_{i=1}^{N} d_i \, x_{n-i} \qquad (6.2.1)$$

beschrieben. $\{\varepsilon_n\}$ ist eine unkorrelierte Zahlenfolge am Eingang des Filtermodells, $\{x_n\}$ ist die Ausgangsfolge, die den beobachteten Prozeß nachbildet. Für das folgende Beispiel wurde die Ordnung M=N=4 gewählt; Tabelle 6.2 zeigt die Filterkoeffizienten c_i und d_i.

i	c_i	d_i
1	-2.2289	3.5285
2	0.7684	-4.7837
3	1.1942	2.9533
4	-0.7336	-0.7036

Tabelle 6.2 : Filterkoeffizienten für das Hybrid-Modell (M=N=4).

Aus der Gl. 6.2.1 kann die Übertragungsfunktion und damit das Leistungsdichtespektrum berechnet werden; die z-Transformation führt dann auf die Autokorrelationsfunktion. Bild 6.3 zeigt die normierten AKF-Werte r(i) und die PARCOR-Koeffizienten $\pi(i)$ für den Hybrid-Prozeß. Aus dem Verlauf der PARCOR-Koeffizienten wird deutlich, daß kein autoregressiver Prozeß endlicher Ordnung vorliegt.

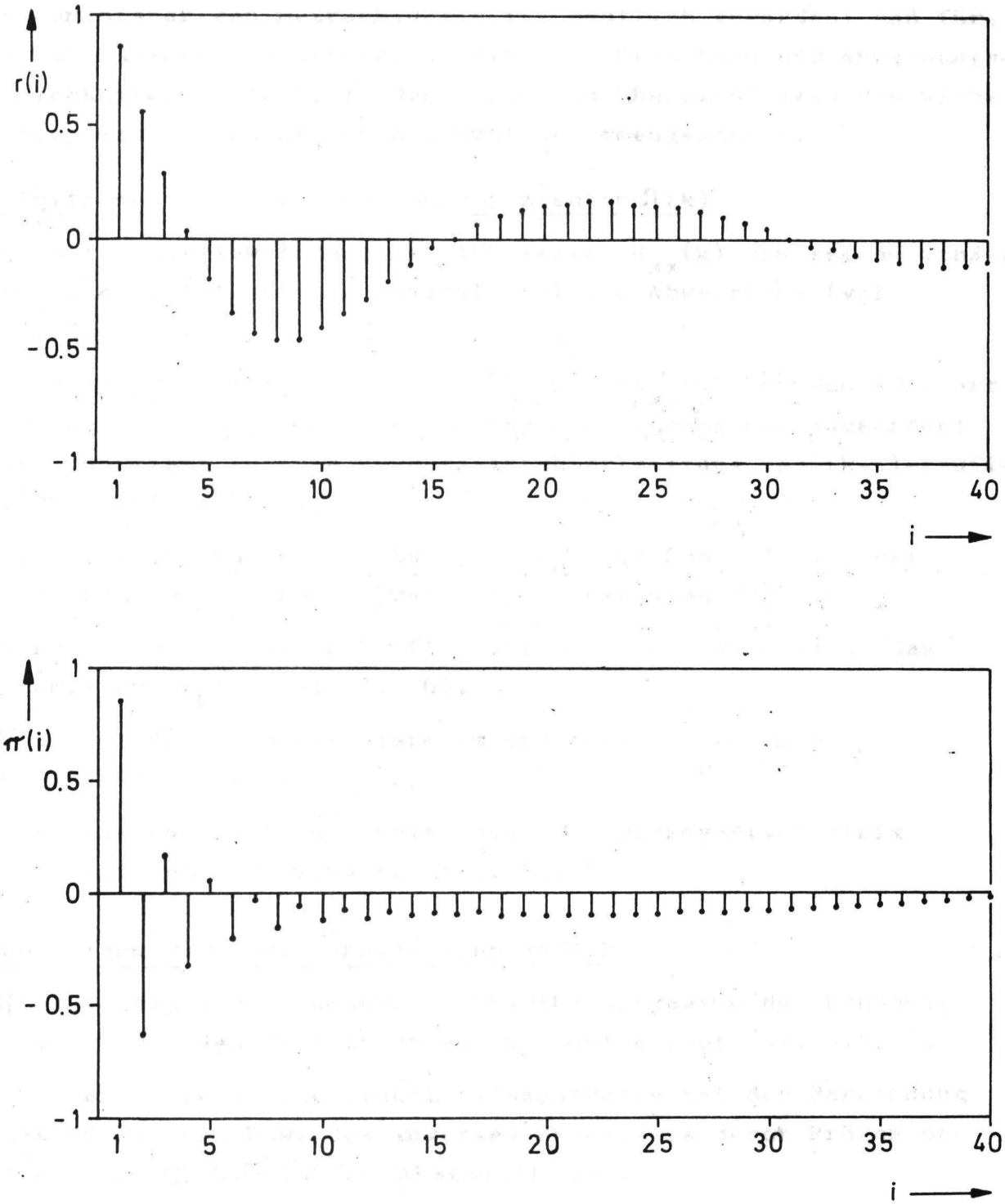

Bild 6.3 : Normierte AKF-Werte r(i) und PARCOR-Koeffizienten $\pi(i)$ für einen Hybrid-Prozeß.

6.3 Bedeutung der PARCOR-Koeffizienten (Zusammenfassung)

Aus den bisherigen Betrachtungen ist deutlich geworden, daß für die PARCOR-Koeffizienten eine Reihe von Deutungen und Anwendungsmöglichkeiten besteht. In der folgenden Übersicht sind die wichtigsten Gesichtspunkte noch einmal zusammengestellt.

Definitionen für die PARCOR-Koeffizienten $\pi(k)$

* $\pi(k)$ ist die Abweichung des AKF-Wertes $R_{xx}(k)$ von seinem Schätzwert, normiert auf die maximal mögliche Abweichung (vgl. Gl. 5.1.9).
* $\pi(k)$ ist die Abweichung des AKF-Wertes $R_{xx}(k)$ von dem AKF-Wert, der einem autoregressiven Prozess der Ordnung k-1 zugeordnet ist, normiert auf die Vorhersagefehlerleistung des (k-1)-stufigen PF-Filters (Gl. 5.2.5).
* $\pi(k)$ ist der Korrelationskoeffizient der Fehlerfolgen bei Vorwärts- und Rückwärtsprädiktion (Abschnitt 5.3).
* $\pi(k)$ ist der negative Koeffizient der höchsten Ordnung des PF-Filters $V_k(z)$ (Gl. 5.2.6).
* $\pi(k)$ ist der konstante Term im orthogonalen Polynom $G_k(z)$ (Gl. 3.1.4).
* $\pi(k)$ ist der Quotient zweier aus der Autokovarianzmatrix abgeleiteten Determinanten (Gl. 5.2.8).

Anwendungen der PARCOR-Koeffizienten $\pi(k)$

* $\pi(k)$ bestimmt den Zuwachs an Prädiktionsgewinn bei Erhöhung der Ordnung des PF-Filters von k-1 auf k (vgl. Gl. 5.2.7).
* $\pi(k)$ ermöglicht eine Stabilitätskontrolle bei der Berechnung des PF-Filters bzw. des inversen PF-Filters durch Prüfen der Bedingung $|\pi(k)|<1$ (vgl. Abschnitt 6.1).
* Aus der Folge der PARCOR-Koeffizienten kann die Ordnung eines autoregressiven Prozesses bestimmt werden.
* Die PARCOR-Koeffizienten beschreiben den beobachteten Prozeß in äquivalenter Weise wie die Prädiktorkoeffizienten oder die AKF-Werte (Anwendungen: Spracherkennung /11,12/; ADPCM-Codierung /3/).

* Die PARCOR-Koeffizienten sind die Filterkoeffizienten des PF-Filters, wenn es in einer Kreuzglied-Kaskadenschaltung realisiert wird (Abschnitt 6.1).

* Die PARCOR-Koeffizienten lassen in einigen Fällen weitgehende Rückschlüsse auf die Erzeugung des beobachteten Prozesses zu: Der Prozeß bestehe z.B. aus den Abtastwerten eines Sprachsignals. Wird als geometrisches Modell des Vokaltrakts ein stückweise homogenes, verlustloses, hartwandiges Rohr angenommen, so sind bei gewissen Annahmen über Randbedingungen an Mund und Glottisende die PARCOR-Koeffizienten mit den Reflexionskoeffizienten an den Sprungstellen des Rohres identisch /21,22/.

7. Literaturverzeichnis

/1/ Atal,B.S.; Schröder,M.R.
Adaptive predictive coding of speech signals.
Bell Syst. Techn. J., Vol. 49 (1970), S.1973-1986.

/2/ Noll,P.; Block,R.
Simulation von Differenz-PCM-Systemen zur Sprachcodierung.
Technischer Bericht Nr. 150 des Heinrich-Hertz-Instituts
Berlin-Charlottenburg, 1972.

/3/ Noll,P.
Sprachübertragung mit adaptiven Differenz-PCM-Verfahren.
Technischer Bericht Nr. 164 des Heinrich-Hertz-Instituts
Berlin-Charlottenburg, 1973.

/4/ Noll,P.
Untersuchungen zur Sprachcodierung mit adaptiven
Prädiktionsverfahren.
NTZ (Nachrichtentechnische Zeitschrift), Heft 2, 1974,
S.67-72.

/5/ Atal,B.S.; Hanauer,S.L.
Speech analysis and synthesis by linear prediction of the
speech wave.
J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 50 (1971), S.637-655.

/6/ Zue,V.W.
Speech analysis by linear prediction.
MIT, Quarterly Progress Report, No. 105 (1972), S.133-142.

/7/ Levinson,N.
The Wiener RMS (root mean square) error criterion in
filter design and prediction.
J. Math. Phys., Vol. 25 (1947), S.261-278.

/8/ Treitel,S.; Robinson,E.A.
The design of high-resolution digital filters.
IEEE Trans. on Geoscience Electr., Vol. GE-4 (1966),
S.25-38, App. III .

/9/ Tretter,S.A.
The all-pole model is theoretically stable.
IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-20 (1972), S.316.

/10/ Jenkins,G.M.; Watts,D.G.
Spectral analysis and its applications.
San Francisco: Holden Day, 1968.

/11/ Nakano,Y.; Ichikawa,A.; Nakata,K.
Evaluation of various parameters in spoken digits recognition.
Survey of Speech Processing Activity, Boston 1972, S.101-104.

/12/ Jesorsky,P.
Die Parameterextraktion als Teilaufgabe der automatischen Spracherkennung.
Kolloquiumsvortrag im Heinrich-Hertz-Institut, Berlin-Charlottenburg, Mai 1974.

/13/ Itakura,F. et al.
An audio response unit based on partial autocorrelation.
IEEE Trans. on Commun. Technology, Vol. COM-20 (1972), S.792-796.

/14/ Noll,P.
Digitale Wiener-Kolmogoroff-Filterung.
NTG-Fachbericht, Band 46, "Probleme und Methoden beim Entwurf digitaler Nachrichten- und Kommunikationssysteme", 1974.

/15/ Burg,J.P.
Maximum entropy spectral analysis.
Proc. NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, Enschede (1968).

/16/ Gersch,W.; Sharpe,D.R.
Estimation of power spectra with finite-order autoregressive models.
IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-18 (1973), S.367-369.

/17/ Grenander,U.; Szegö,G.
Toeplitz forms and their applications.
Berkeley: Univers. California Press, 1958.

/18/ Westlake,J.R.
A handbook of numerical matrix inversion and solution of linear equations.
John Wiley&Sons, 1968.

/19/ Makhoul,J.; Wolf,J.
Linear prediction and the spectral analysis of speech.
BBN Report No. 2304, Bolt Beranek and Newman Inc., Cambridge,Mass., August 1972.

/20/ Stricker,W.
Erzeugung von Signalen mit vorgegebenem Leistungsdichtespektrum.
Studienarbeit, TU Berlin, 1974.

/21/ Wakita,H.
Direct estimation of the vocal tract shape by inverse filtering of acoustic speech waveforms.
IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-21 (1973), S.417-427.

/22/ Nakajima,T. et al.
Estimation of vocal tract area functions by adaptive inverse filtering methods and identification of articulatory model.
Proceedings of the Speech Communication Seminar, Stockholm, 1.-3. August 1974.

/23/ Papoulis,A.
Probability, random variables and stochastic processes.
New York: McGraw-Hill, 1965.

Anhang

1.A Ableitung des Prädiktionsfehlerfilters aus der Theorie der orthogonalen Polynome

Das PF-Filter $V_N(z)$ und das orthogonale Polynom $G_N(z)$ sind über die Beziehung

$$G_N(z) = V_N(z)\, z^N \tag{3.1.4}$$

miteinander verknüpft (vgl. Abschnitt 3.1).
Im folgenden wird ein Beweis für diesen Zusammenhang angegeben. Ausgangspunkt ist die Orthogonalitätsbedingung im Frequenzbereich, die von den orthogonalen Polynomen erfüllt sein muß. Daraus läßt sich die Orthogonalitätsbedingung der linearen Schätzung im Zeitbereich /23/ ableiten, die direkt auf das Prädiktionsfehlerfilter führt.

Definition der orthogonalen Polynome:

Gegeben sei das Leistungsdichtespektrum $S_{xx}(e^{j\Omega})$,$\Omega = -\pi \ldots \pi$, eines stochastischen Prozesses $\{X_n\}$.
Zu diesem LDS gehört eindeutig eine Schar von auf dem Einheitskreis orthogonalen Polynomen $G_N(z)$, die folgende Bedingungen erfüllen:

I) $G_N(z)$ ist ein Polynom in z vom Grad N,

$$G_N(z) = \sum_{i=0}^{N} g_i\, z^i \quad . \tag{A.1.1}$$

Der Koeffizient g_N von z^N weist den Wert Eins auf:

$$G_N(z) = g_0 + g_1\, z + \ldots + z^N \quad .$$

II) Die Polynome $G_N(z)$ erfüllen die Orthogonalitätsbedingung

$$[G_M(z), G_N(z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_M(e^{j\Omega})\, G_N(e^{-j\Omega})\, S_{xx}(e^{j\Omega})\, d\Omega = 0 \quad ;$$

$$\text{für } M \neq N \quad . \tag{A.1.2}$$

Beweisgang:

Es wird eine Abbildung des Polynoms $G_N(z)$ auf ein Polynom $A_N(z)$ definiert, derart, daß

$$A_N(z) = z^{-N}\, G_N(z) \quad ; \qquad (A.1.3)$$

$$A_N(z) = 1 + g_{N-1}\, z^{-1} + g_{N-2}\, z^{-2} + \ldots + g_0\, z^{-N} \quad .$$

Zu zeigen ist, daß $A_N(z)$ die Übertragungsfunktion $V_N(z)$ eines PF-Filters N-ter Ordnung darstellt.

Ausgangspunkt ist die Orthogonalitätsbedingung nach Gl. A.1.2 . Das Produkt $[G_M(z), G_N(z)]$ wird auf dem Einheitskreis $z=e^{j\Omega}$ (Kontur C) ausgewertet, mit $dz = j\, e^{j\Omega} d\Omega$ gilt auch

$$[G_M(z), G_N(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C G_M(z)\, G_N(z^{-1})\, S_{xx}(z)\, z^{-1}\, dz \quad . \qquad (A.1.4)$$

Mit Gl. A.1.3 wird die Gl. A.1.4

$$[G_M(z), G_N(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \tilde{A}_M(z)\, A_N(z^{-1})\, S_{xx}(z)\, z^{-1}\, dz \quad ,$$

$$\text{wobei} \quad \tilde{A}_M(z) = z^{M-N}\, A_M(z) \quad .$$

Dies ist aber die inverse z-Transformierte $R_{NM}(k)$ der Kreuzleistungsdichte

$$S_{NM}(z) = \tilde{A}_M(z)\, A_N(z^{-1})\, S_{xx}(z) \qquad (A.1.5)$$

für den Wert k=0 :

$$R_{NM}(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C S_{NM}(z)\, z^{k-1}\, dz \quad ; \qquad (A.1.6)$$

$$[G_M(z), G_N(z)] = R_{NM}(0) \quad . \qquad (A.1.7)$$

Betrachtet man die Polynome $\tilde{A}_M(z)$ und $A_N(z)$ als Übertragungsfunktionen digitaler Filter, so ist der Kreuzkorrelationskoeffizient $R_{NM}(0)$ der Korrelationskoeffizient der Ausgangsfolgen der Filter $\tilde{A}_M(z)$ und $A_N(z)$, wenn sie beide mit der gleichen Eingangsfolge x(n) gespeist werden. Die Folge x(n) ist eine Musterfolge

eines stochastischen Prozesses mit dem Leistungsdichtespektrum $S_{xx}(e^{j\Omega})$. Die Ausgangsfolgen der beiden Filter werden mit $y_M(n)$ und $y_N(n)$ bezeichnet (vgl. Bild A.1).

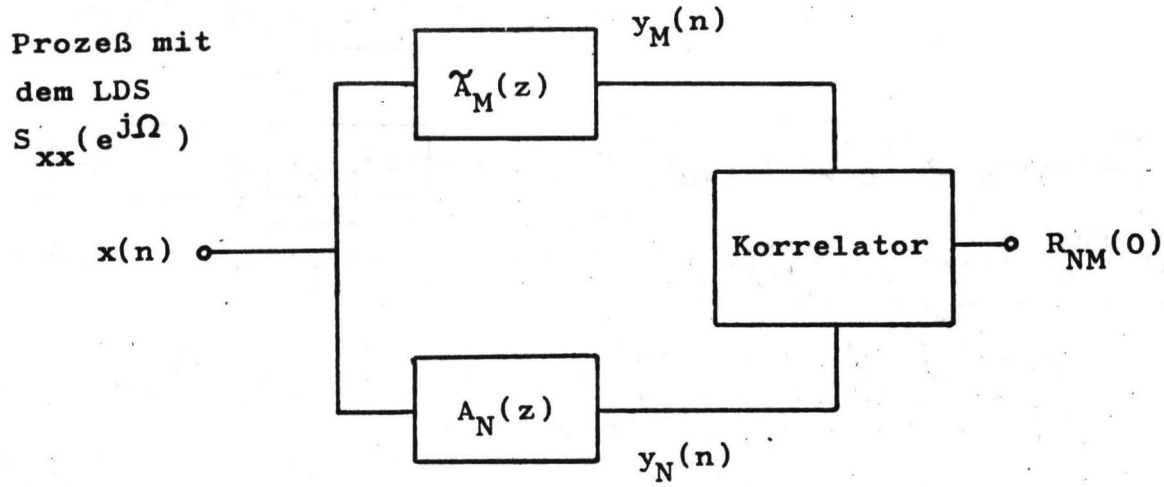

Bild A.1 : Interpretation der Gl. A.1.6 für den Wert k=0 .

Mit der Gl. A.1.7 ist ersichtlich, daß aus der Orthogonalitätsbedingung im Frequenzbereich (Gl. A.1.2) eine Orthogonalitätsbedingung im Zeitbereich folgt, die verlangt, daß die Ausgangsfolgen $y_M(n)$ und $y_N(n)$ nicht miteinander korreliert sind ($Y_M \perp Y_N$):

$$E\left[Y_M\, Y_N\right] = 0 \qquad \text{für } M \neq N \quad . \tag{A.1.8}$$

Es wird nun eine ganze Schar von Polynomen

$$A_N(z) \quad \text{und} \quad \tilde{A}_M(z) = \tilde{A}_{N-k}(z) = z^{-k}\, A_{N-k}(z) \quad ; \quad k = 1,\ldots,N$$

betrachtet; die dazugehörigen Filter sind in Bild A.2 angegeben. Die Orthogonalitätsbeziehung Gl. A.1.8 verlangt, daß

$$E\left[Y_N\, Y_{N-k}\right] = 0 \quad ; \quad k = 1,\ldots,N \quad . \tag{A.1.9}$$

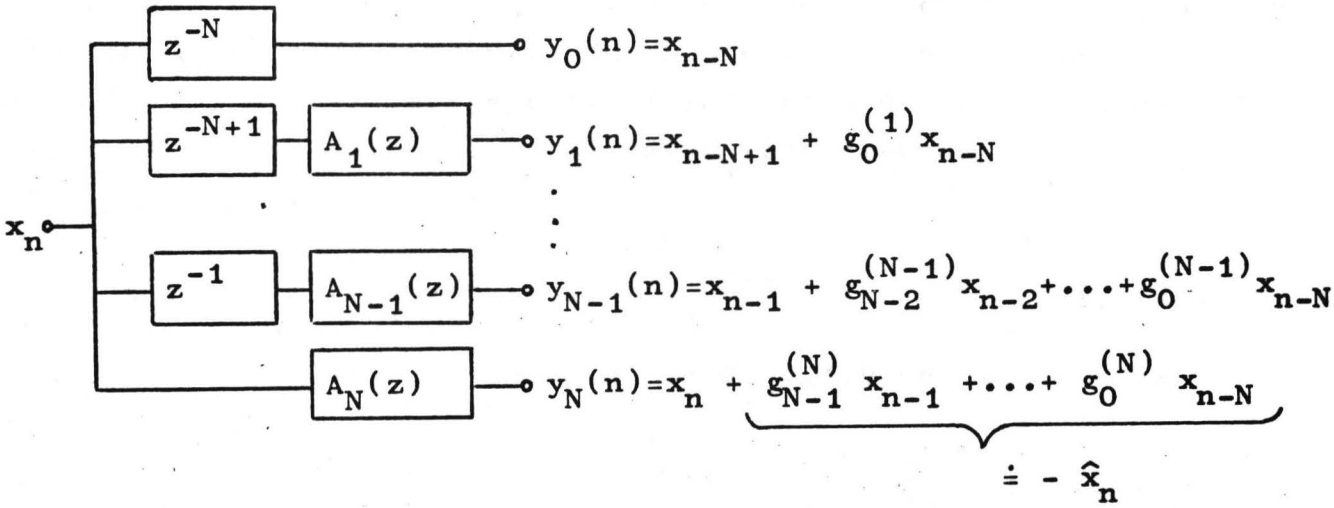

Bild A.2 : Ausgangsfolgen der Filter $A_N(z)$ und $\tilde{A}_{N-k}(z)$.

Das bedeutet im einzelnen:

(1) $E[Y_N Y_0] = 0 \implies Y_N \perp X_{n-N}$

(2) $E[Y_N Y_1] = 0 \implies$ (mit Gl.(1)) $Y_N \perp X_{n-N}, X_{n-N+1}$

usw. bis

(N) $E[Y_N Y_{N-1}] = 0 \implies Y_N \perp X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_{n-N}$. (A.1.10)

Die Größe y_N ist andererseits gerade eine Differenz zwischen x_n und $\hat{x}_n$, einer Linearkombination vergangener x-Werte $x_{n-1}, \ldots, x_{n-N}$ und läßt sich als Schätzfehler einer Schätzung für den Wert x_n aus N zurückliegenden Abtastwerten auffassen.

Die Gl. A.1.10 verkörpert nun <u>das Orthogonalitätsprinzip der linearen Schätzung</u> /23/, das besagt, daß der Schätzfehler orthogonal zu allen Daten sein muß.
Diese Überlegung ergibt somit, daß <u>das Polynom $A_N(z)$ die Übertragungsfunktion eines PF-Filters N-ter Ordnung</u> angibt; d.h., die Beziehung nach Gl. 3.1.4 bzw. Gl. A.1.3 ist damit bewiesen.

2.A Explizite Darstellung der orthogonalen Polynome

Das PF-Filter N-ter Ordnung $V_N(z)$ und damit auch das dazugehörige Polynom $G_N(z)$ sind eindeutig durch die ersten N+1 AKF-Werte $R_{xx}(0),\ldots, R_{xx}(N)$ festgelegt. Es läßt sich daher eine explizite Darstellung der Polynome $V_N(z)$ und $G_N(z)$ angeben:

Für das PF-Filter

$$V_N(z) = 1 + v_1 z^{-1} + \ldots + v_N z^{-N} \qquad \text{(A.2.1)}$$

ergibt sich mit den Gleichungen 2.1.7, 2.1.9 und 2.1.11 das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \ldots & R_{xx}(N) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \ldots & R_{xx}(N-1) \\ & & \ddots & \\ R_{xx}(N) & R_{xx}(N-1) & \ldots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_N^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.2.2)}$$

σ_N^2 ist die Varianz des Signals am PF-Filterausgang.

Die Koeffizienten $v_1,\ldots, v_k,\ldots, v_N$ können nach der Cramerschen Regel berechnet werden:

$$v_k = \sigma_N^2 \frac{(-1)^k}{D_N} \begin{vmatrix} R_{xx}(1) & R_{xx}(0)\ldots R_{xx}(k-2) & R_{xx}(k)\ldots R_{xx}(N-1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{xx}(N) & \ldots & \ldots R_{xx}(0) \end{vmatrix} \qquad \text{(A.2.3)}$$

D_N ist die Determinante der Autokovarianzmatrix in Gl. A.2.2 (Toeplitz-Determinante).

Setzt man die nach Gl. A.2.3 berechneten Koeffizienten in Gl. A.2.1 ein und betrachtet diese Gleichung als Entwicklung einer Determinante nach den Elementen der ersten Zeile, so erhält man für diese Determinante

$$V_N(z) = \frac{\sigma_N^2}{D_N} \begin{vmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-N} \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & \dots & R_{xx}(N-2) \\ \vdots & & & \\ R_{xx}(N) & R_{xx}(N-1) & \dots & R_{xx}(0) \end{vmatrix} \qquad (A.2.4)$$

Berücksichtigt man, daß die erste Komponente im Koeffizientenvektor $\underline{v}_N$ von Gl. A.2.2 den Wert Eins hat, so ergibt Gl. A.2.3

$$\sigma_N^2 = \frac{D_N}{D_{N-1}} \quad . \qquad (A.2.5)$$

Die Vorhersagefehlerleistung kann also ebenfalls explizit durch den Quotienten der Toeplitz-Determinanten D_N und D_{N-1} angegeben werden.

Für die explizite Darstellung des orthogonalen Polynoms $\Phi_N(z)$ erhält man mit den Gleichungen 3.1.7, A.2.4 und A.2.5 die Form

$$\Phi_N(z) = \frac{1}{\sqrt{D_N \; D_{N-1}}} \begin{vmatrix} z^N & z^{N-1} & \dots & 1 \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & \dots & R_{xx}(N-2) \\ \vdots & & & \\ R_{xx}(N) & R_{xx}(N-1) & \dots & R_{xx}(0) \end{vmatrix} \qquad (A.2.6)$$

<u>Anmerkung:</u>

Die direkte Berechnung der Toeplitz-Determinante D_N erfordert bei größeren Werten von N einen hohen Rechenaufwand. Die Determinante D_N kann jedoch auch aus den Vorhersagefehlerleistungen σ_i^2 der PF-Filter bestimmt werden. Die rekursive Anwendung der Gl. A.2.5 führt auf

$$D_N = R_{xx}(0) \prod_{i=1}^{N} \sigma_i^2 \quad . \qquad (A.2.7)$$

Die Größen σ_i^2 können sehr einfach mittels des in Abschnitt 4.1 beschriebenen rekursiven Verfahrens berechnet werden.

3.A Explizite Darstellung der PARCOR-Koeffizienten

Die PARCOR-Koeffizienten $\pi(k)$ werden ausschließlich aus den AKF-Werten $R_{xx}(0),\ldots, R_{xx}(k)$ berechnet. Es läßt sich daher eine Darstellung für $\pi(k)$ angeben, die nur auf aus der Autokovarianzmatrix abgeleiteten Determinanten beruht.

Der PARCOR-Koeffizient $\pi(k)$ ist durch

$$\pi(k) = \frac{R_{xx}(k) - R_S(k)}{\sigma_{k-1}^2} \tag{5.2.5}$$

bestimmt. Für die Differenz $R_{xx}(k) - R_S(k)$ ergibt sich mit Gl.4.1.3

$$R_{xx}(k) - R_S(k) = 1\cdot R_{xx}(k) + v_1\, R_{xx}(k-1) + \ldots + v_{k-1}\, R_{xx}(1) \quad . \tag{A.3.1}$$

Der Vergleich von Gl. A.3.1 mit Gl. A.2.1 zeigt, daß entsprechend Gl. A.2.4 auch folgende Darstellung möglich ist:

$$R_{xx}(k) - R_S(k) = \frac{\sigma_{k-1}^2}{D_{k-1}} \begin{vmatrix} R_{xx}(k) & R_{xx}(k-1) & \ldots & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \ldots & R_{xx}(k-2) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & \ldots & R_{xx}(k-3) \\ \vdots & & & \\ R_{xx}(k-1) & R_{xx}(k-2) & \ldots & R_{xx}(0) \end{vmatrix} \tag{A.3.2}$$

Die Determinante in Gl. A.3.2 wird mit D_k^* bezeichnet. Durch (k-1)-malige Vertauschung der Zeilen der Determinante D_k^* erhält man

$$D_k^* = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(k-2) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & \dots & R_{xx}(k-3) \\ & & \ddots & \\ R_{xx}(k) & R_{xx}(k-1) & \dots & R_{xx}(1) \end{vmatrix} \qquad (A.3.3)$$

D_k^* ist die negative Adjunkte zum Element $R_{xx}(k)$ in der ersten Zeile und letzten Spalte der Toeplitz-Determinante D_k (vgl. Gl. 5.1.3). Damit ergibt sich für den PARCOR-Koeffizient

$$\mathfrak{N}(k) = \frac{D_k^*}{D_{k-1}} \quad . \qquad (A.3.4)$$

Die Darstellung nach Gl. A.3.4 ist auch in /10/ angegeben worden.